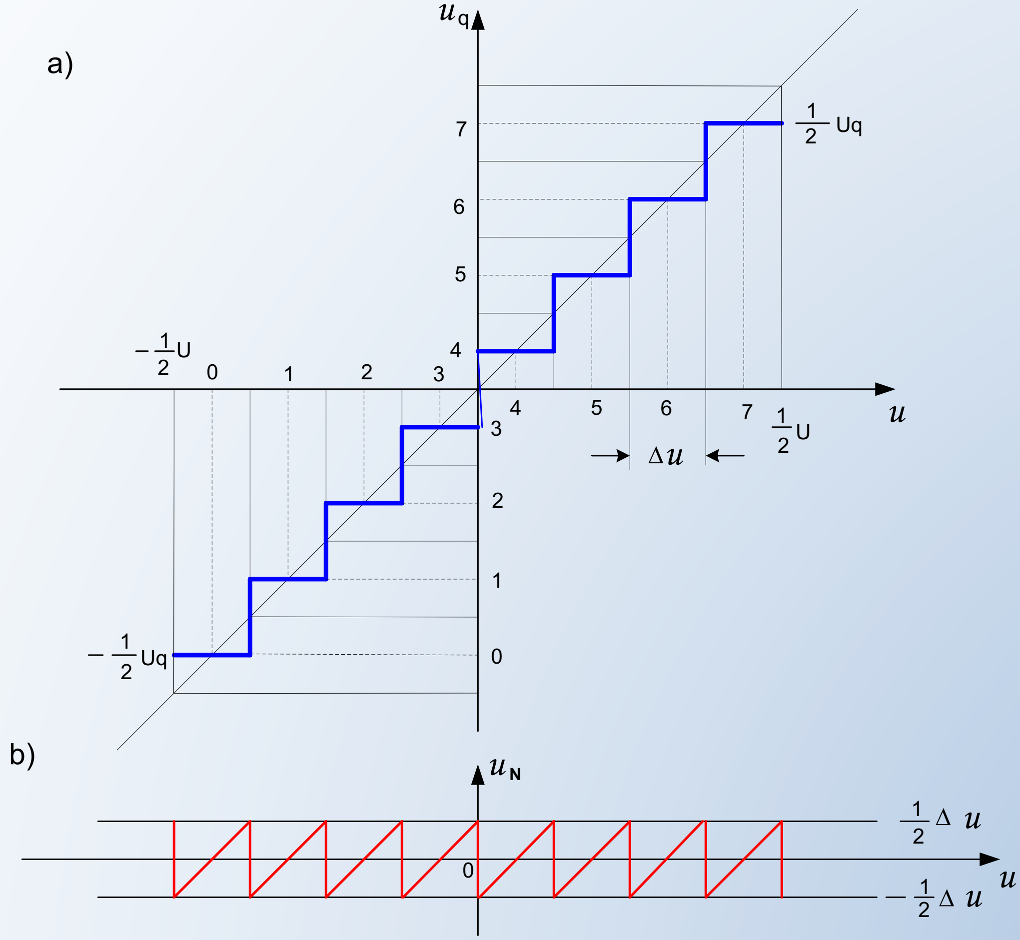
RAVNOMJERNA KVANTIZACIJA

Za procjenu greške kvantizacije koristi se snaga šuma kvantizacije koja predstavlja srednju kvadratnu vrijednost greške kvantizacije.



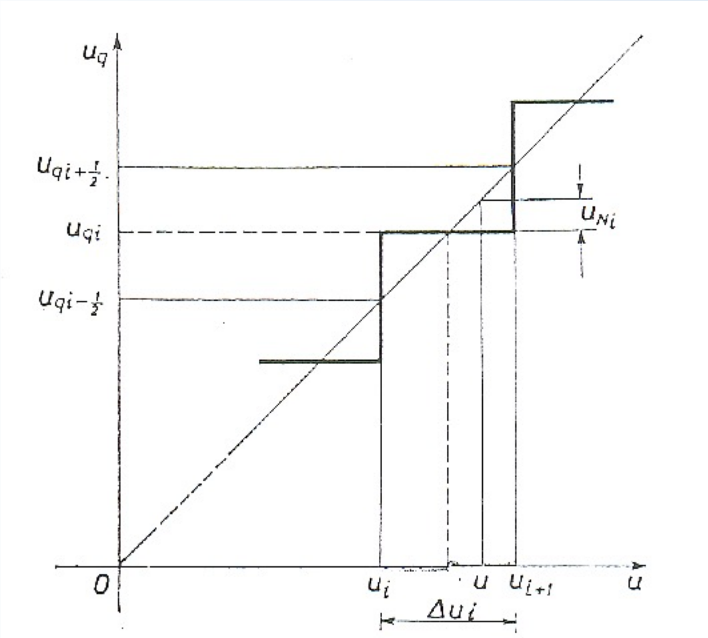
a) Karakteristika kvantizatora ; b) karakteristika greške kvantizacije

Karakteristika ravnomjerne kvantizacije je stepenasta funkcija, pri čemu su na apcisi nanesene vrijednosti odbiraka u, signala u(*t*), a na ordinati vrijednosti kvantiziranih odbiraka u_q. Ako sa *q* označimo broj kvantizacionih nivoa, onda:

$$U = q\Delta u$$

$$U_q = (q-1)\Delta u$$

Na prethodnoj slici prikazana je karakteristika greške kvantizacije u_N u zavisnosti od amplituda odbiraka signala u(*t*). Uočava se da će greška biti utoliko manja ukoliko je korak kvantizacije Δu manji.



Svaki odbirak amplitude u iz kvantizacionog intervala (u_i, u_{i+1}), poslije kvantizacije ima ampltudu u_{qi}

Neka je amplituda u odbirka signala u(t) takva da se nalazi u intervalu

$$u_i \leq u \leq u_{i+1}$$

Amplitude svih odbiraka koje se nađu u ovom intervalu, poslije kvantizacije iznosiće u_{qi}. Prema tome, greška koja se čini u ovom intervalu, biće:

$$u_{Ni} = u - u_{qi}$$

Neka je *p(u)du* vjerovatnoća da se amplituda odbirka signala u(t) koji kvantiziramo nalazi u intervalu od *u* do *u + du.* Sa *p(u)* je označena funkcija gustine vjerovatnoće odbiraka signala u(t).

Prema tome, srednja kvadratna vrijednost greške u posmatranom intervalu (u_i , u_{i+1}) biće:

$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(u - u_{qi}\right)^2 p(u)du$$

Sa slike se vidi da je:

$$u_{qi} = \frac{1}{2}\left(u_i + u_{i+1}\right)$$

Drugim riječima, u_{qi} dijeli interval $u_{i+1} - u_i = \Delta u_i$ na dva jednaka dijela, pa je:

$$u_i = u_{qi} - \frac{1}{2}\Delta u_i$$

$$u_{i+1} = u_{qi} + \frac{1}{2}\Delta u_i$$

Pretpostavimo da je interval Δu_i, odnosno korak kvantizacije mali tako da se može smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(u) = p\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right) = p(u_{qi}) \quad \text{za } u_i \le u \le u_{i+1}$$

Ovo omogućava da *p(u)* izvučemo ispred znaka integrala, pa dobijamo:

$$\overline{u_{Ni}^2} = p(u_{qi}) \int_{u_{qi}-\frac{1}{2}\Delta u_i}^{u_{qi}+\frac{1}{2}\Delta u_i} (u - u_{qi})^2 \, du = \frac{1}{12} p(u_{qi}) (\Delta u_i)^3$$

Ukupna srednja kvadratna vrijednost greške $\overline{u_N^2}$ biće jednaka sumi vrijednosti $\overline{u_{Ni}^2}$ iz svih intervala. Njih ima koliko i koraka kvantizacije, to jest *q:*

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1} \overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi})(\Delta u_i)^3$$

Pošto posmatramo ravnomjernu kvantizaciju, korak kvantizacije je konstantan tj. $\Delta u_i = \Delta u = \text{const}$

Stoga prethodni izraz možemo napisati u obliku:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12} (\Delta u)^2 \sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi}) \Delta u$$

Veličina $p(u_{qi})\,\Delta u = p(u_{qi})\,(u_{i+1} - u_i)$ predstavlja vjerovatnoću da se amplituda odbirka *u* nalazi između u_i i u_{i+1}, dakle u *i* – tom intervalu. Suma ovakvih vjerovatnoća za sve *q* intervale mora da bude jednaka 1, jer se sve amplitude nalaze u dijapazonu obuhvaćenom sa *q* intervala.

Zato je:

$$\sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi})\Delta u = 1$$

pa je:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}(\Delta u)^2, \quad \Delta u = const$$

Dakle, u slučaju ravnomjerne kvantizacije, srednja kvadratna vrijednost greške zavisi samo od koraka kvantizacije Δu. Ovakva greška ne može da se izbjegne. Ona se manifestuje kao šum i njena srednja kvadratna vrijednost :

$$P_{Nq} = \overline{u_N^2} = \frac{1}{12}(\Delta u)^2$$

se naziva **snagom šuma kvantizacije**.

Za ocjenu kvaliteta samog postupka kvantizacije služi odnos srednje snage kvantiziranog signala i snage šuma kvantizacije, i on se jednostavno naziva odnosom signal/šum kvantizacije.

Pretpostavimo da je u(t) signal čiji su odbirci takvi da se amplituda bilo kojeg od njih nalazi u intervalu $-\frac{1}{2}U \leq u \leq \frac{1}{2}U.$

Neka je $u_q(t)$ kvantizirani signal čiji odbirci u_q mogu imati amplitude:

$$\pm\frac{1}{2}\Delta u, \pm\frac{3}{2}\Delta u, \pm\frac{5}{2}\Delta u, \ldots \pm\frac{q-1}{2}\Delta u$$

Pretpostavimo još da je u(t) takav signal da su amplitude svih njegovih odbiraka jednako vjerovatne. To znači da je funkcija gustine vjerovatnoće *p(u) = p_0 = const,* pa je srednja snaga signala u(t):

$$P_s = \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 p(u) du = p_0 \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 du = \frac{1}{12} p_0 U^3$$

Kako je:

$$p_0 U = p_0 \left[\frac{1}{2} U - \left(-\frac{1}{2} \right) U \right] = 1$$

izraz za srednju snagu signala P_s glasi:

$$P_s = \frac{1}{12} U^2 = \frac{1}{12} q^2 (\Delta u)^2$$

Izračunajmo sada srednju snagu P_q kvantiziranog signala $u_q(t)$. Ona je jednaka srednjoj kvadratnoj vrijednosti amplituda kvantiziranih odbiraka. S obzirom da su sve amplitude odbiraka jednako vjerovatne važi:

$$P_q = \frac{1}{q} 2 \frac{(\Delta u)^2}{4} \left[1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (q-1)^2 \right] = \frac{q^2 - 1}{12} (\Delta u)^2$$

Upoređujući dva poslednja izraza dobija se:

$$P_s - P_q = \frac{1}{12} q^2 (\Delta u)^2 - \frac{q^2 - 1}{12} (\Delta u)^2 = \frac{1}{12} (\Delta u)^2 = P_{Nq}$$

Traženi odnos srednje snage kvantiziranog signala i šuma kvantizacije koji postoji na izlazu iz predajnika biće jednak:

$$A_{Nq} = \frac{P_q}{P_{Nq}} = q^2 - 1$$

Pošto je uvijek q^2 >> 1, to se može napisati:

$$A_{Nq} \cong q^2$$

Iz ovog izraza se vidi da što je *q* veće, to je i veći odnos/signal šum kvantizacije. Obično se ovaj odnos izražava u decibelima:

$$a_{Nq} = 10\log A_{Nq} = 10\log\left(q^2 - 1\right) \cong 20\log q$$

Eksperimentalno je utvrđeno da je 16, pa čak i 8 kvantizacioniih nivoa dovoljno za dobru razumljivost prenesenog govora. Međutim, pri ovakvom broju nivoa šum je veoma izrazit. Za kvalitet koji se smatra besprekornim koristi se 128 kvantizacionih nivoa.

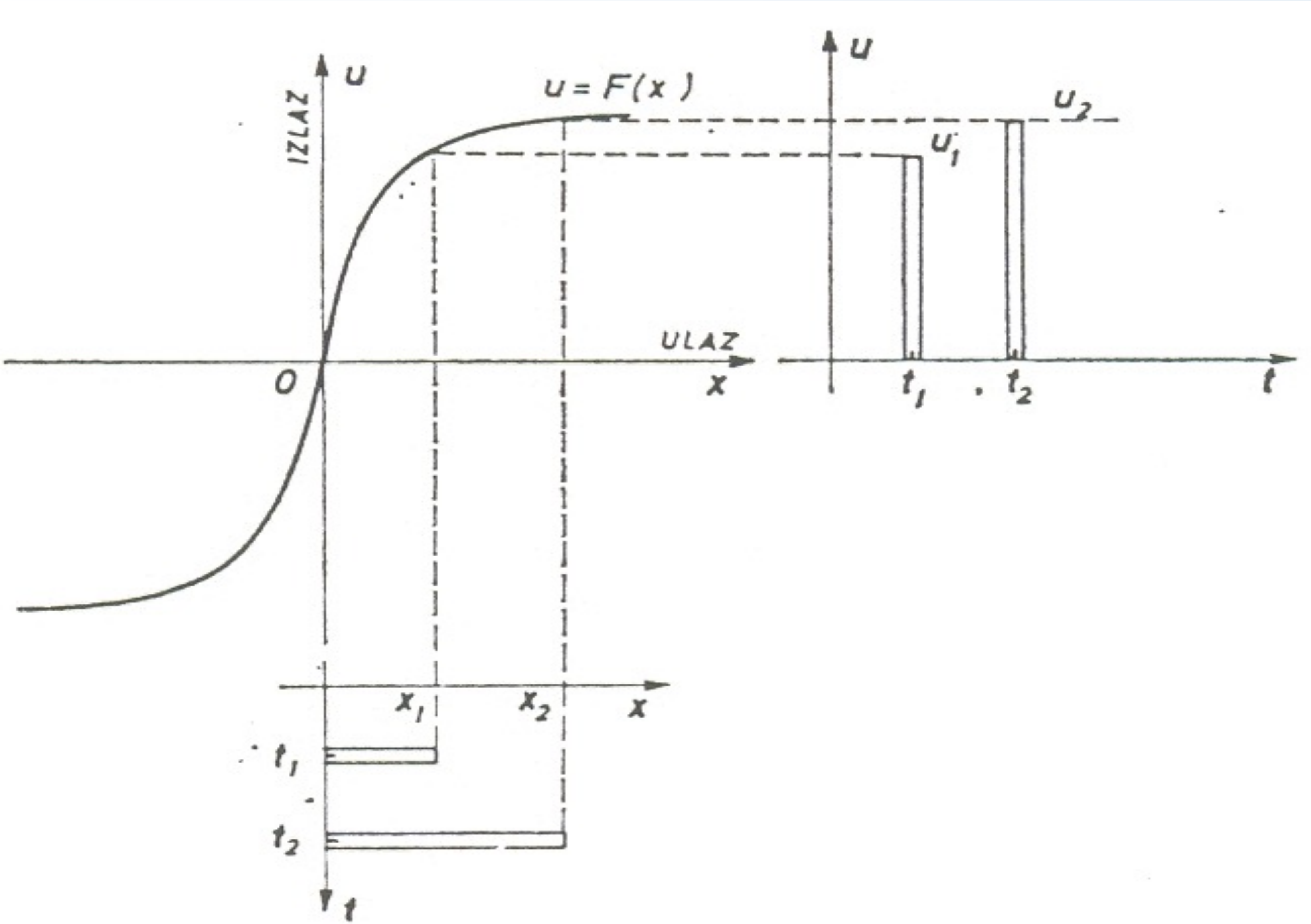
NERAVNOMJERNA KVANTIZACIJA. KOMPRESIJA

Pokazali smo da srednja snaga šuma ravnomjerne kvantizacije zavisi samo od koraka kvantizacije Δu, a ne od amplitude signala. Prema tome, ako bi se za jedan dati signal koristila ravnomjerna kvantizacija, jasno je da bi odnos signal/šum kvantizacije bio veliki za veće amplitude, a mali za male.

Ako u statistici signala preovlađuju signali malih amplituda, ravnomjerna kvantizacija ne predstavlja optimalno rješenje. Zadržavajući isti broj koraka kvantizacije *q*, bolje je uzeti male korake za signale malih amplituda, a veće za signale većih amplituda, jer će na taj način, odnos signal/šum kvantizacije biti znatno poboljšan za male signale, a neznatno pogoršan za velike.

U principu je moguće da se napravi sklop koji bi direktno obavljao neravnomjernu kvantizaciju odbiraka primarnog signala, pri čemu bi zakon promjene širine koraka kvantizacije bio diktiran određenom statistikom signala. Međutim, postoji i jedno bolje i jednostavnije rješenje.

Najprije se odbirci primarnog signala propuste kroz jedan nelinearan sklop koji se naziva **kompresorom.** Njegova karakteristika “ izlaz - ulaz" prikazana je na sledećoj slici funkcijom *u=F(x).*

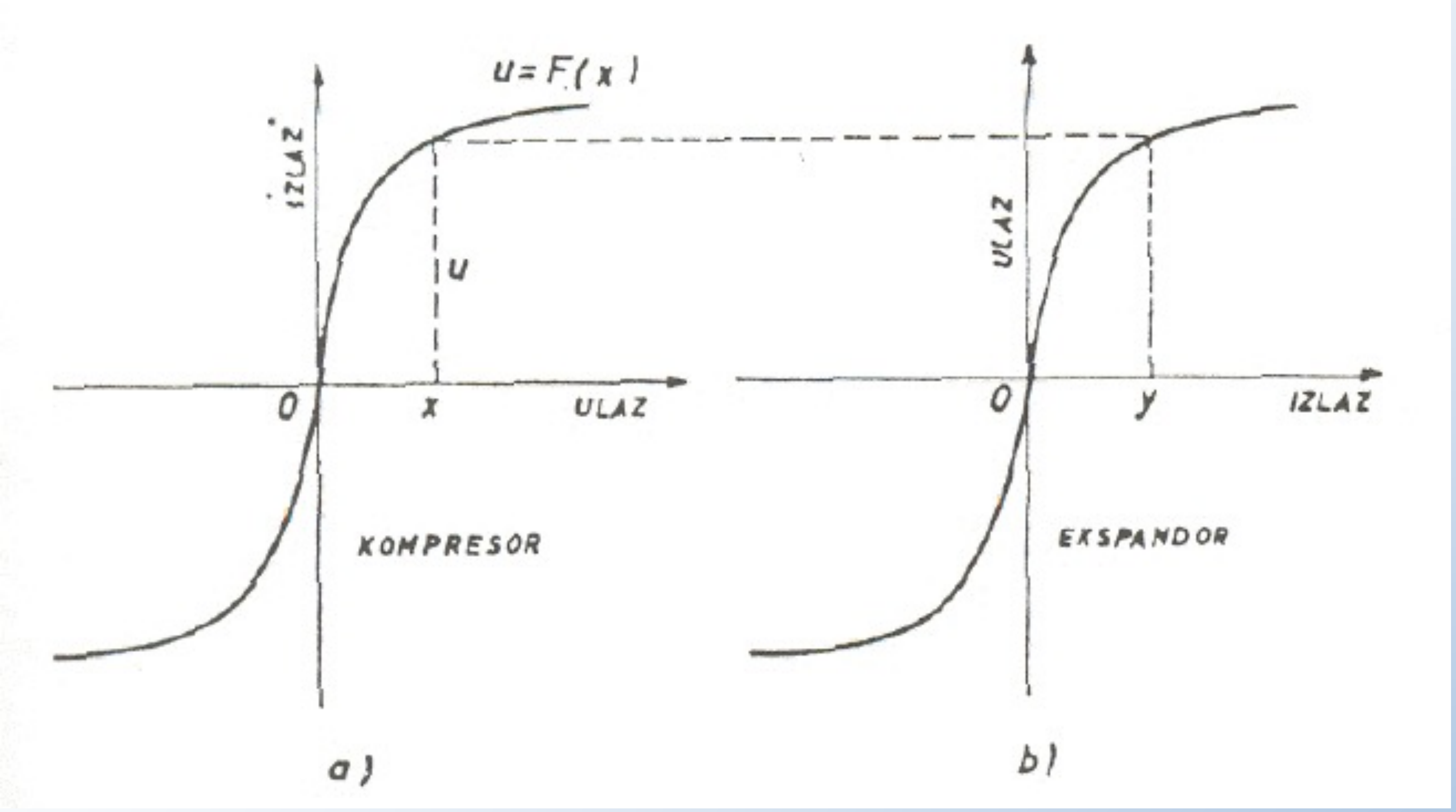


Karakteristika kompresora u = F(x)

- Pri tome *x* predstavlja amplitudu odbiraka signala, na ulazu u kompresor, a *u* amplitudu odbiraka na njegovom izlazu. Lako je uočiti funkciju kompresora. On odbirke malog intenziteta znatno više pojačava od obiraka velikog intenziteta. Na taj način, dijapazon između malih i velikih amplituda koji postoji na ulazu u kompresor, na izlazu biva komprimovan. Ovakav sklop mora da dejstvuje trenutno, pa se stoga naziva trenutnim kompresorom, za razliku od nekih drugih koji to nisu.

- Ako se sada, na odbirke koji su dobijeni na izlazu iz kompresora, primijeni postupak ravnomjerne kvantizacije, jasno je da će se postići onaj osnovni cilj: odbirci malog intenziteta biće "finije" kvantizirani od onih velikog intenziteta. Naravno, karakteristika kompresora $u = F(x)$ zavisi od statistike signala.

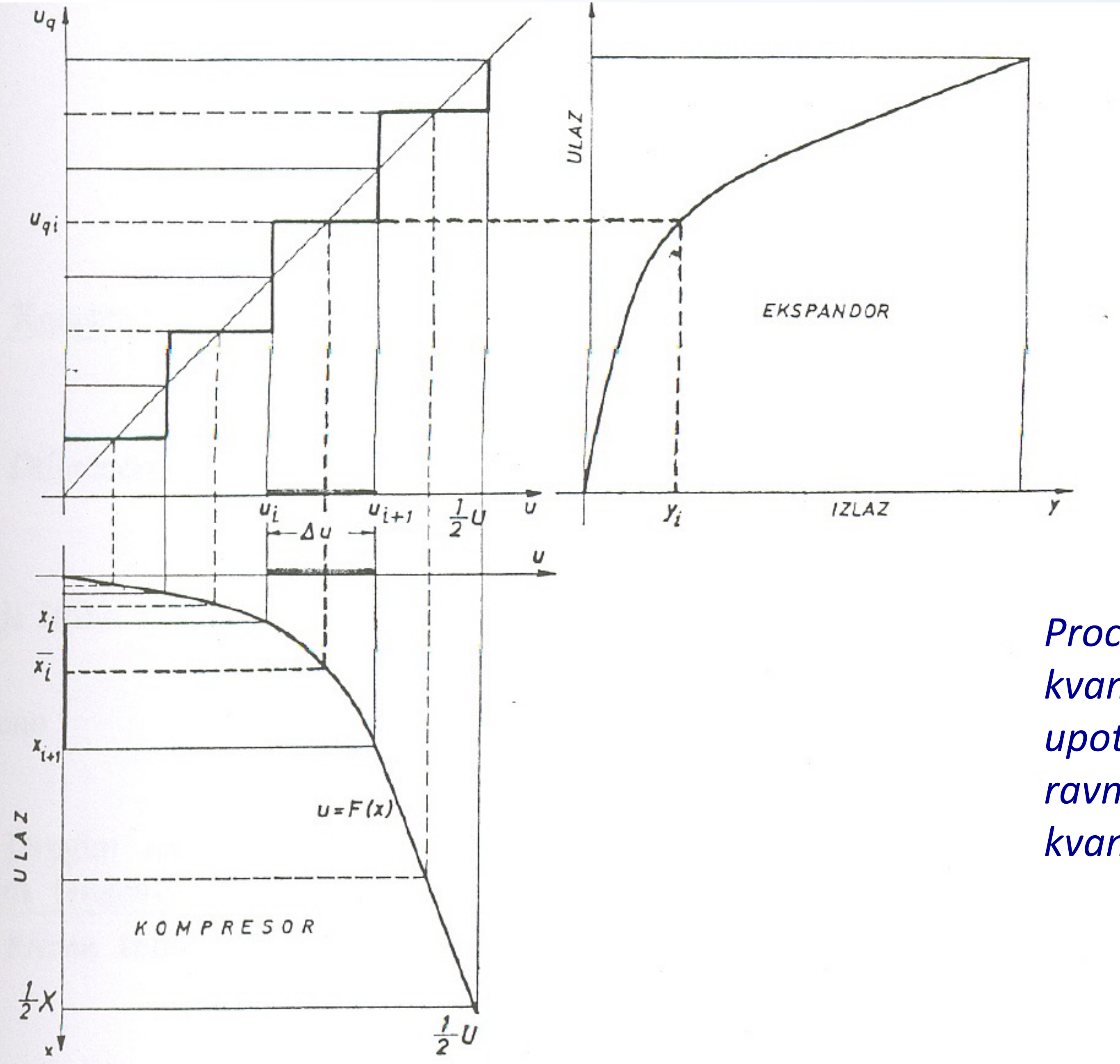
- Na prijemnoj strani potrebno je obaviti operaciju inverznu kompresiji, da bi se dobili originalni odbirci. To se obavlja sklopom koji se naziva trenutnim **ekspandorom.** Ako je karakteristika "izlaz - ulaz" onakva kakva je prikazana na prethodnoj slici, onda ekspandor mora da ima istu takvu karakteristiku, s tim što ona predstavlja zavisnost "ulaza od izlaza", a ne "izlaza od ulaza".



Karakteristike kompresora i ekspandora

Sa slike se vidi da će odbirci velikog intenziteta biti znatno manje oslabljeni od onih malog intenziteta koji će pretrpjeti veće slabljenje.

Karakteristike kompresora i ekspandora moraju biti komplementarne u tom smislu da, ako se vežu u tandem kompresor - ekspandor, ulaznom signalu x u kompresor mora da odgovara izlazni signal y iz ekspandora takav da je $y = x$. To je uslov da ovaj tandem, poznat pod nazivom **kompandor**, ne unosi izobličenje.



Proces neravnomjerne kvantizacije ostvarene upotrebom kompresora i ravnomjerne kvantizacije

- U donjem dijelu prethodne slike nacrtana je karakteristika kompresora *u = F(x)*, gdje *x* predstavlja amplitude odbiraka ulaznog signala, a *u* amplitude odbiraka na izlazu iz kompresora. Karakteristika kvantizacije je predstavljena stepenastom krivom i svi koraci kvantizacije na njoj su međusobno jednaki.
- Posmatramo *i* – ti interval kvantizacije. Amplitude odbiraka primarnog signala *x* koje su takve da je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, poslije kompresije postaju jednake *u* i nalaze se u intervalu $u_i \leq u \leq u_{i+1}$. Sve amplitude iz ovoga intervala poslije kvantizacije postaju jednake u_{qi}. Odbirak takve amplitude u_{qi} koji dođe na ulaz ekspandora, na njegovom izlazu ima amplitudu y_i. Dakle, svi odbirci čije su amplitude *x*, gdje je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, reprodukovaće se na prijemu kao jedan te isti odbirak amplitude y_i.
- Prema tome, srednja kvadratna greška u ovom intervalu biće:

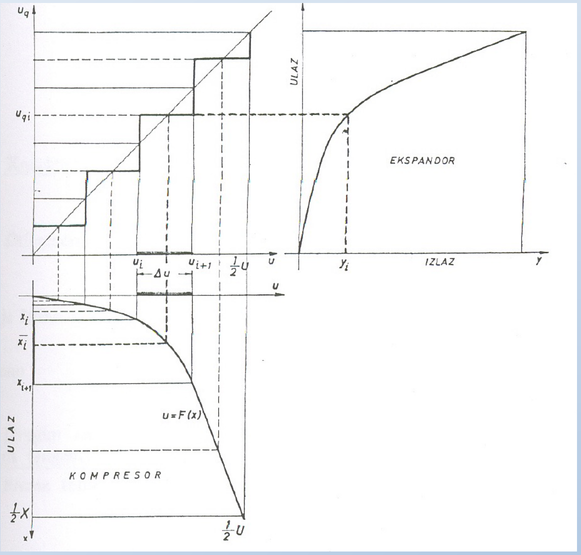
$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x)\,dx$$

U ovom izrazu *p(x)* predstavlja funkciju gustine vjerovatnoće koja karakteriše raspodjelu amplituda odbiraka *x* primarnog signala *x(t).*

Pretpostavimo da je

$$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right) = \overline{x_i}$$

Ovakva pretpostavka biće utoliko ispravnija ukoliko je interval (x_{i+1} - x_i) manji. Neka je širina tog intervala Δx_i



$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

Uz učinjenu pretpostavku važiće da je:

$$x_i = \overline{x_i} - \frac{1}{2}\Delta x_i$$

$$x_{i+1} = \overline{x_i} + \frac{1}{2}\Delta x_i$$

Pošto je Δx_i malo, možemo smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(x) = p\left(\overline{x_i}\right) \quad \text{za} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Sada se može pisati da je:

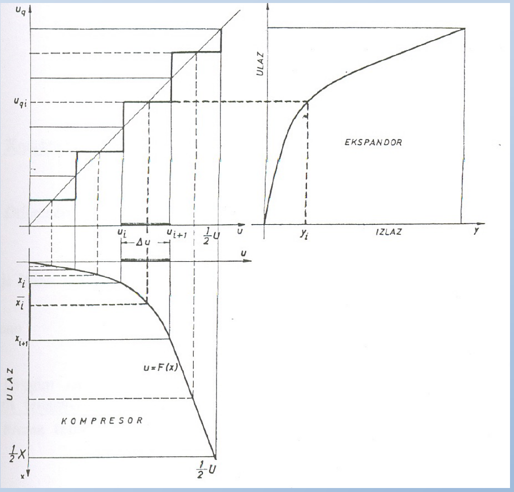
$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-y_i)^2 p(x)\,dx \cong p\left(\overline{x}_i\right) \int_{\overline{x}_i - \frac{1}{2}\Delta x_i}^{\overline{x}_i + \frac{1}{2}\Delta x_i} \left(x - \overline{x}_i\right)^2 dx = \frac{1}{12}(\Delta x_i)^3\, p\left(\overline{x}_i\right)$$

Karakteristika kompresora data je izrazom *u = F(x).* Diferenciranjem ovog izraza dobija se: *du = F'(x)dx*

Ako je širina koraka kvantizacije dovoljno mala može se napisati da je:

$$\Delta u \cong F'(x)\Delta x$$

$$\Delta u_i \cong F'\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i$$



Drugim riječima, funkcija *u = F(x),* u intervalu (x_{i+1} - x_i) aproksimira se njenom tangentom u tački $x = \overline{x}_i$.

Prema tome, imamo da je: $$\Delta x_i \cong \frac{\Delta u_i}{F'\left(\overline{x}_i\right)}$$

Ali, kako su koraci kvantizacije Δu_i konstantni i jednaki:

$$\Delta u_i = \Delta u = \frac{U}{q} = const$$

to je

$$\Delta x_i \cong \frac{1}{F'\left(\overline{x_i}\right)} \cdot \frac{U}{q}$$

Tako da se dobija:

$$\overline{u_{Ni}^2} \cong \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^3 p\left(\overline{x_i}\right) = \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^2 p\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

Ukupna srednja kvadratna greška iz svih intervala kojih ima *q*, i koji su numerisani od 0 do *q – 1*, biće:

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1}\overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\sum_{i=o}^{q-1}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

Pošto smo pretpostavili da su intevali Δx_i mali, može se preći sa sume na integral, tako da je:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \frac{p(x)}{[F'(x)]^2}dx$$

Kompresor će se napraviti tako da je

$$x = \frac{1}{2}X, u = \frac{1}{2}U$$

pri čemu je:

$$\frac{1}{2}X = \frac{1}{2}U$$

Stoga prethodni integral može da se napiše u obliku:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{U}{2}}^{\frac{U}{2}} \frac{p(x)}{[F'(x)]^2}dx$$

Ovaj izraz predstavlja opšti izraz za srednju kvadratnu grešku kvantizacije za neku datu karakteristiku kompresije *u = F(x).*

IMPULSNA MODULACIJA

- Impulsna modulacija pripada grupi modulacija kod kojih je modulisani signal diskretan. U procesu prenosa impulsno modulisanih signala uočavaju se dva različita stanja: u jednom, signal postoji, dok ga u drugom nema. Svako od ovih stanja traje neko konačno vrijeme. Aktivni i pasivni intervali se smjenjuju naizmjenično jedan za drugim u toku vremena.

- Primjena impulsne modulacije zasniva se na teoremi o odabiranju koja kaže da se svaki signal, čiji je spektar ograničen učestanošću f_m, može jednoznačno opisati odbircima. Interval između dva susjedna odbirka definiše u vremenu periodu odabiranja T koja **mora** imati vrijednost:

$$T \leq \frac{1}{2 f_m}.$$

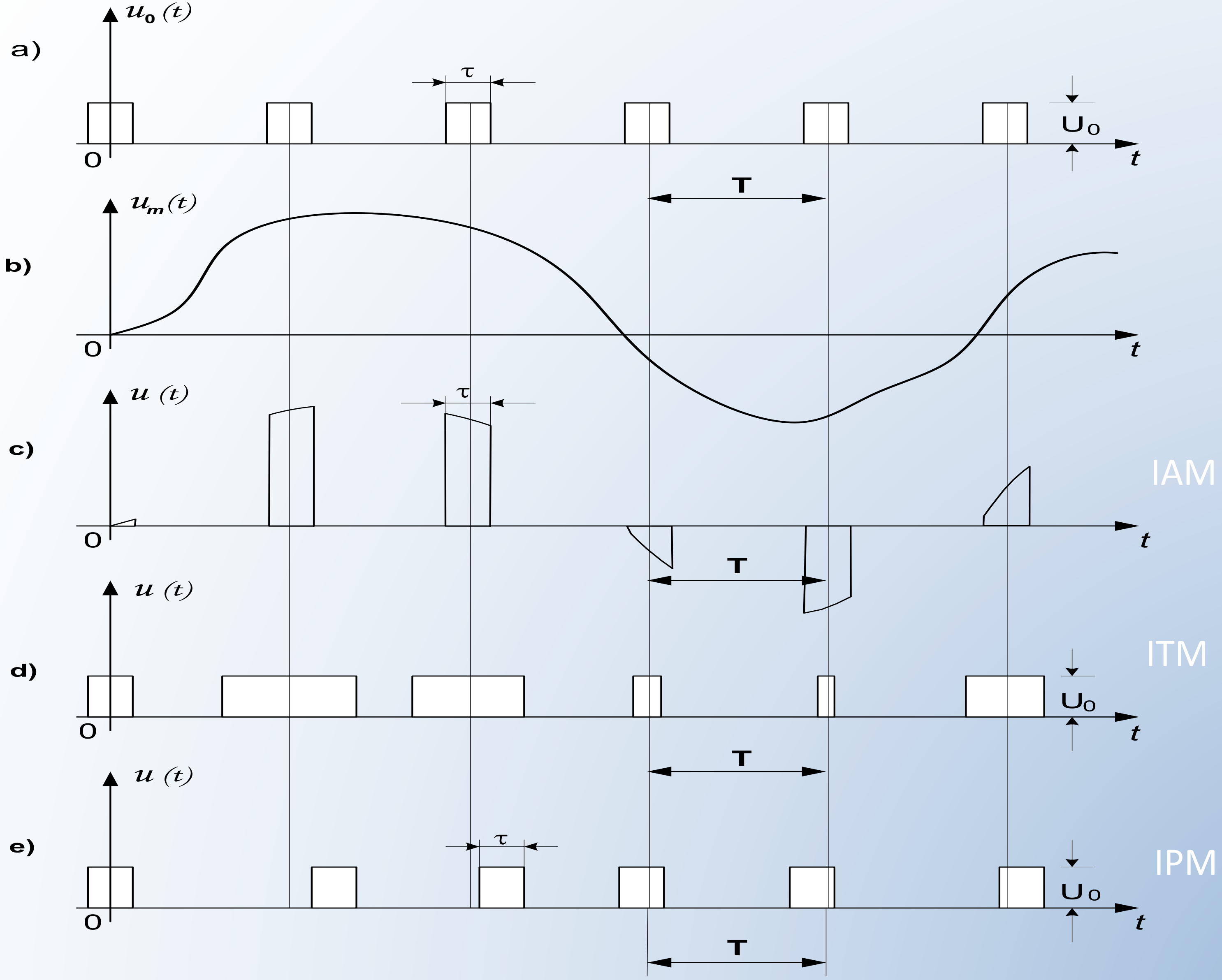
Na osnovu ovako uzetih odbiraka uvijek je moguće rekonstruisati originalan signal, propuštanjem odbiraka kroz niskofrekventni filtar granične učestanosti f_m.

Ulogu nosioca u procesu impulsne modulacije, gotovo po pravilu, ima periodična povorka pravougaonih impulsa $U_o(t)$. Tri parametra karakterišu ovu funkciju:

- amplituda impulsa U_o,
- trajanje impulsa τ i
- perioda ponavljanja T.

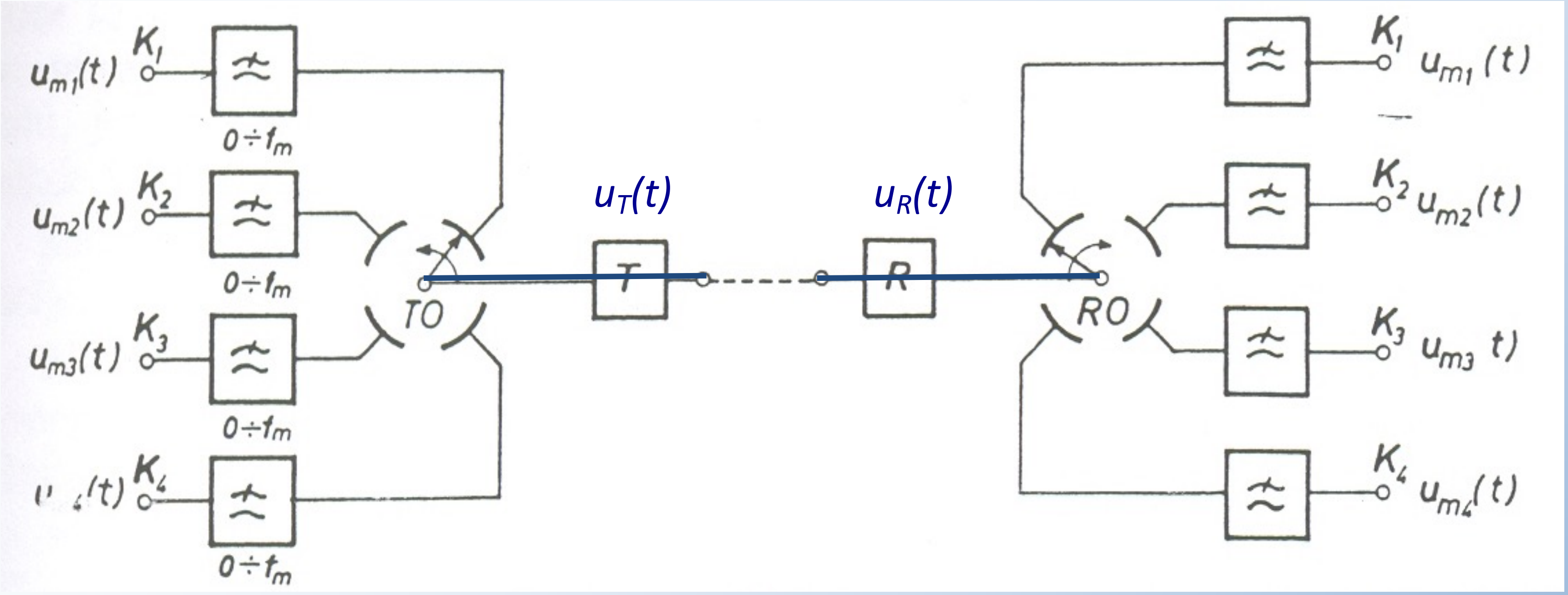
Svaka od ovih veličina se može učiniti zavisnom od modulišućeg signala, na čemu se i zasnivaju postupci impulsne modulacije.

- Tako, ako se amplituda impulsa U_o mijenja direktno proporcionalno odbircima modulišućeg signala $u_m(t)$ dok ostali parametri povorke ostaju konstantni, radi se **impulsno amplitudskoj modulaciji (IAM).**
- Mijenja li se samo trajanje impulsa τ tako da je ono direktno srazmjerno odgovarajućim odbircima modulišućeg signala, dobiće se **impulsna modulacija po trajanju (ITM)** ili impulsno širinska modulacija.
- Ako se mijenja samo treći preostali parametar (period ponavljanja T) direktno srazmjerno odbircima modulišućeg signala, što u suštini znači da se položaj impulsa mijenja u odnosu na njegov referentni položaj u odsustvu modulišućeg signala, dobija se **impulsno položajna modulacija (IPM).**

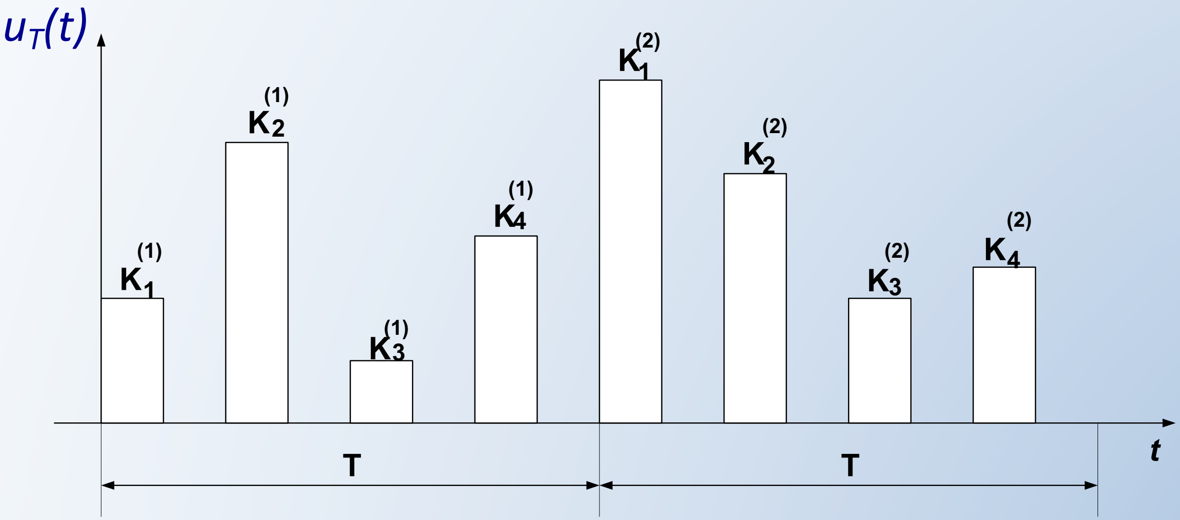


a)
$u_0(t)$
τ
U_0
O
t
T
b)
$u_m(t)$
O
t
c)
$u(t)$
τ
O
t
T
IAM
d)
$u(t)$
U_0
O
t
T
ITM
e)
$u(t)$
τ
U_0
O
t
T
IPM

- Glavnu primjenu impulsna modulacija ima u izgradnji sistema multipleksa, odnosno sistema za višestruki pristup. U tome ona ima određene prednosti nad ostalim vrstama modulacije. Ovakvi sistemi se nazivaju **multipleksom sa vremenskom raspodjelom kanala (VRK) ili vremenskim multipleksom.**
- U svakoj periodi odabiranja u njenom aktivnom dijelu postoji po jedan impuls, dok preostali, pasivni dio ostaje neiskorišćen. Kako je trajanje ovog dijela znatno duže od trajanja aktivnog intervala, on može da se iskoristi za postavljanje niza novih odbiraka od kojih svaki pripada drugom izvoru. Razmatra se više različitih i nezavisnih izvora signala. Jedan takav sistem multipleksa sa VRK prikazan je svojom principskom šemom na slici.



Neka se postupkom impulsne amplitudske modulacije prenose četiri nezavisna signala. U svakom kanalu na ulazu postoji po jedan filtar propusnik niskih učestanosti. Na taj način svaki od signala $u_{mi}(t)$ ima spektar ograničen učestanošću f_m. Sa TO šematski je prikazan predajni odabirač. Njegov klizač se obrće konstantnom ugaonom brzinom. Na taj način na izlaz predajnika u sukcesivnim vremenskim intervalima dolaze odbirci pojedinih signala $u_{mi}(t)$. Saglasno ovom, signal na ulazu u predajnik izgledaće kao na slici:



- U toku jedne periode odabiranja, $T = 1/2f_m$, klizač napravi jedan obrt i od svakog signala uzme po jedan odbirak. Dobijeni multipleksni signal prenosi se linijom veze i prima u prijemniku. Na ulazu prijemnika nalazi se prijemni odabirač RO, čiji klizač mora da se okreće sinhrono sa klizačem predajnog odabirača TO. Na taj način, on u toku jedne periode odabiranja, sukcesivno, u odgovarajućim trenucima, uključuje svaki od kanalnih filtara na izlazu prijemnika R. Na taj način se svaki od ulaza izlaznih filtara pobuđuje odbircima koji pripadaju tom kanalu (odbirci odgovarajućeg signala $u_{mi}(t)$). Na izlazu filtra ovi odbirci daju originalan signal.

- Osnovna ideja u izgradnji sistema multipleksa sa vremenskom raspodjelom kanala je da se **cio sistem prenosa u određenim vremenskim intervalima stavlja na raspolaganje samo jednom kanalu.** Znači, nije moguće, bar u principu, da signali iz dva ili više kanala budu istovremeno prisutni u sistemu za prenos. Iz ovoga proističu određene prednosti sistema sa vremenskom raspodjelom kanala u odnosu na sisteme sa frekvencijskom raspodjelom kanala (FRK).

- Dobra strana ovakvog sistema je što pitanje linearnosti karakteristike ulaz-izlaz za pojedine sklopove nije ni izdaleka tako kritično kao u sistemu sa FRK. U sistemima sa FRK istovremeno prisutni različiti signali uslijed nelinearnosti sklopova prouzrokuju preslušavanje nastalo intermodulacijom. Ovo u sistemima sa VRK nije moguće.
- Sva kola i sklopovi u sistemima sa VRK su jednostavniji. Nema velikog broja različith kvalitetnh filtara, modulatora, generatora nosilaca i drugih sklopova. Isto tako degradacija kvaliteta izazvana šumom znatno je manja za određene vrste sistema sa impulsnom modulacijom nego što je to u sistemima sa FRK.
- Najveći nedostatak predstavlja potreba za relativno vrlo širokim propusnim opsegom učestanosti koji mora da ima sistem za prenos. Ukoliko se želi da multipleks sadrži veći broj kanala, utoliko je manji interval vremena u jednoj periodi odabiranja T koji se stavlja na raspolaganje svakom od kanala, a to znači i širi propusni opseg. Takođe je potrebno da linearna amplitudska i fazna izobličenja u sistemima sa VRK budu mala. U protivnom, može da dođe do takve deformacije impulsa da oni budu pomjereni sa mjesta u intervalu odabiranja koje im pripada. Na taj način nastaje preslušavanje. Još jedna specifičnost sistema sa VRK je problem sinhronizacije. On se obično rješava slanjem sinhronizacionih signala kojima se najčešće stavlja na raspolaganje jedan poseban kanal.

SPEKTAR IAM SIGNALA

Neka je $u_0(t)$ funkcija koja opisuje nosilac. Kako je to periodična povorka pravougaonih impulsa amplitude U_0, trajanja τ i periode ponavljanja $T = 1/2f_m$, gdje je f_m maksimalna učestanost u spektru signala $u_m(t)$, $u_0(t)$ će biti:

$$u_0(t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT)$$

U ovom izrazu funkcija $s(t - nT)$ definisana je na sljedeći način:

$$s(t - nT) = \begin{cases} 1 & \text{, za } nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \\ 0 & \text{, za ostale vrijednosti} \end{cases}$$

Kako funkcija u$_0$*(t)* predstavlja periodičnu povorku pravougaonih impulsa možemo je predstaviti Fourierovim redom:

$$u_0(t)=U_0\frac{\tau}{T}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}\cos n\omega_o t\right]=U_0\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}e^{jn\omega_o t}$$

Množenjem modulišućeg signala u$_m$*(t)* funkcijom u$_0$*(t)* dobija se IAM signal:

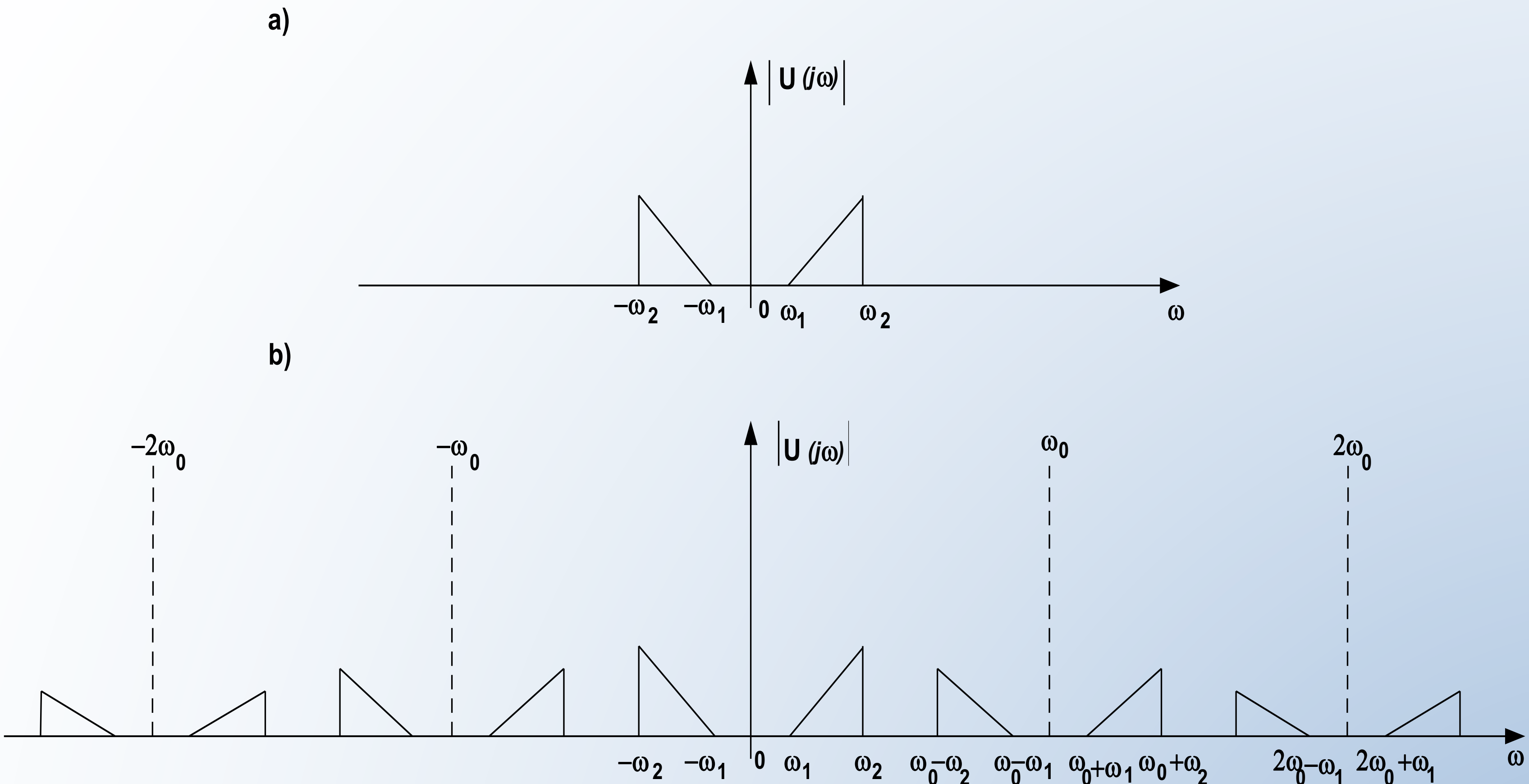
$$u(t)=k_A u_m(t)u_o(t)=k_A U_0\frac{\tau}{T}u_m(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}\cos n\omega_0 t\right]$$

Ako se izračuna Fourierova transformacija ovog izraza dobija se spektar IAM signala u obliku:

$$U(j\omega)=k_A\frac{\tau}{T}U_0U_m(j\omega)+k_A\frac{\tau}{T}U_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}\times\{U_m[j(\omega-n\omega_0)]+U_m[j(\omega+n\omega_0)]\}$$

Prvi član u izrazu predstavlja spektar proporcionalan spektru modulišućeg signala. Svaki od članova pod znakom sume predstavlja spektar AM-2BO signala koji bi se dobio kad bi se modulišućim signalom $u_m(t)$ amplitudski modulisao nosilac $U_0 cos\ n\omega_0 t$. Pri tome, spektralne gustine amplituda svakog AM-2BO signala u okolini učestanosti $n\omega_0$ su redukovane za faktor

$$\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}$$



a) Spektralna gustina amplituda modulišućeg signala ; b) Spektralna gustina amplituda IAM signala

Dobijeni rezultat iz ove analize spektra neposredno ukazuje na način na koji je moguće demodulisati IAM signal. Vidi se da se na izlazu idealnog filtra propusnika niskih učestanosti dobija modulišući signal $u_m(t)$ pod uslovom da se na ulaz filtra dovede IAM signal. Ovo se može ostvariti pod uslovom da ne dođe do preklapanja gornjeg bočnog opsega modulišućeg signala i donjeg bočnog opsega AM-2BO signala na učestanosti ω_0. Dakle, mora biti zadovoljen uslov:

$$\omega_2 \leq \omega_0 - \omega_2$$

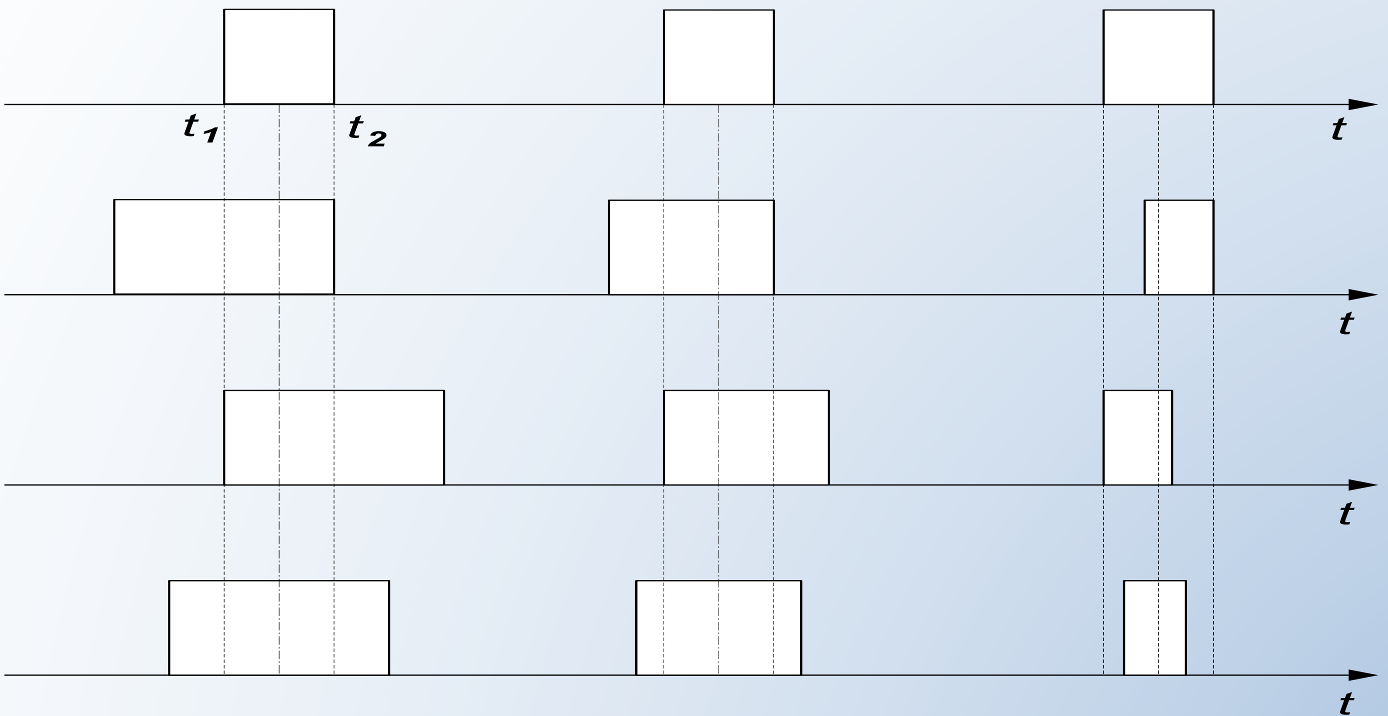
odnosno $\omega_0 \geq 2\omega_2$. Ovo, drugim riječima znači da perioda odabiranja

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ mora biti $T \leq \dfrac{1}{2f_2}$,

gdje je f_2 maksimalna učestanost u spektru modulišućeg signala.

IMPULSNA MODULACIJA PO TRAJANJU (ITM)

U postupku ITM trajanje impulsa nosioca postaje direktno proporcionalno modulišućem signalu u$_m$*(t).*

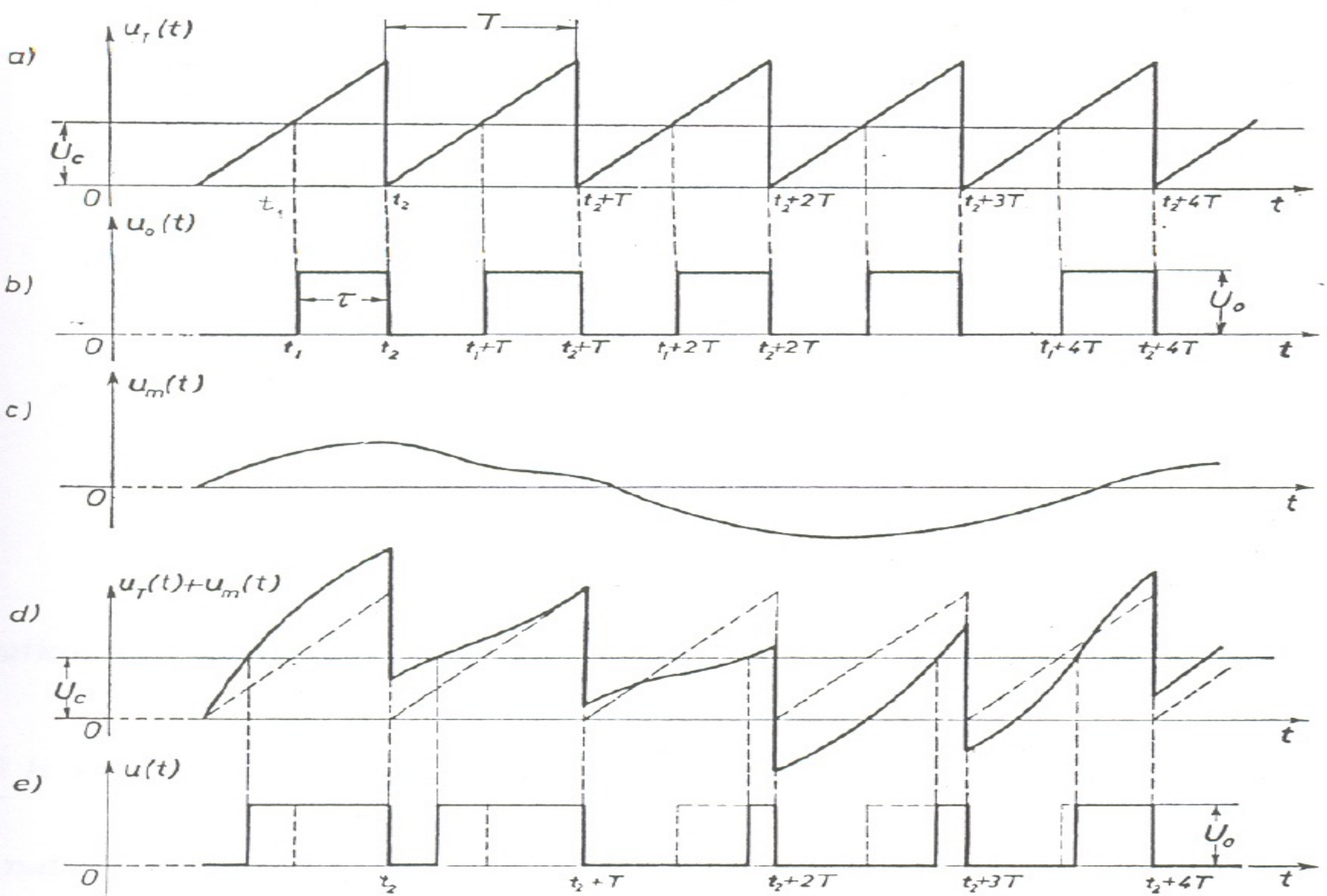


a) Nemodulisani nosilac ; b) ITM sa promjenom prednje ivice ; c) ITM sa promjenom zadnje ivice ; d) ITM sa promjenom prednje i zadnje ivice impulsa

- Promjena dužine trajanja impulsa može da se ostvari na tri načina. Na prethodnoj slici pod a) je prikazan nemodulisani nosilac. Moguće je mijenjati dužinu trajanja impulsa u zavisnosti od modulišućeg signala,
  - bilo pomjeranjem samo prednje ivice impulsa (t_1),
  - bilo pomjeranjem samo zadnje ivice impulsa (t_2) ili
  - simetričnim pomjeranjem i prednje i zadnje ivice u odnosu na sredinu impulsa nemodulisanog nosioca.

- Impulsna modulacija po trajanju manje je osjetljiva na pojavu šuma u odnosu na IAM. Sem toga, ova modulacija se relativno lako ostvaruje i istovremeno iz nje može da se dobije određenim postupkom impulsna položajna, pa i frekvencijska modulacija.

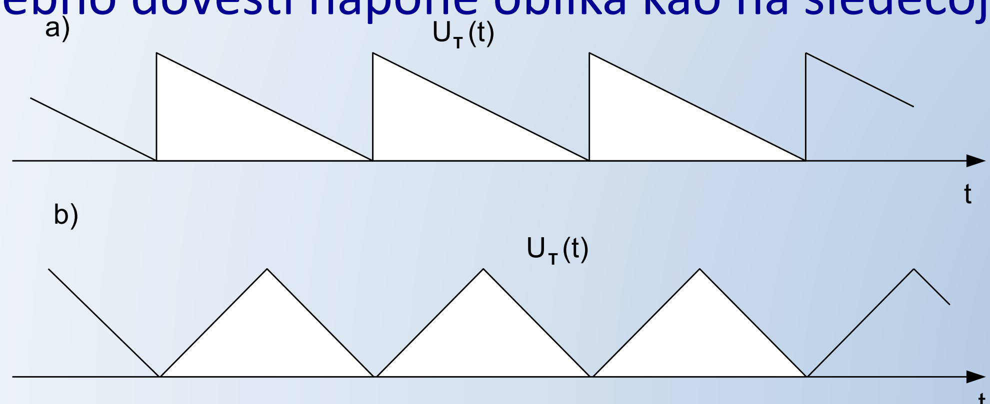
PRINCIP REALIZACIJE ITM



U ovom postupku koristi se jedan jednostavan elektronski sklop koji ima osobinu da na svom izlazu generiše pravougaoni impuls koji traje za sve vrijeme dok je pobudni napon veći od neke određene vrijednosti. Ako se na ulaz ovakvog sklopa dovede napon testerastog oblika $u_T(t)$ kao što je prikazano na prethodnoj slici i ako je za pobudu potrebno da ulazni napon bude veći od U_c, onda će se u svakom intervalu vremena u kojem je $u_T(t) > U_c$ generisati na izlazu po jedan pravougaoni impuls. Na taj način se od testerastog napona dobija povorka pravougaonih impulsa.

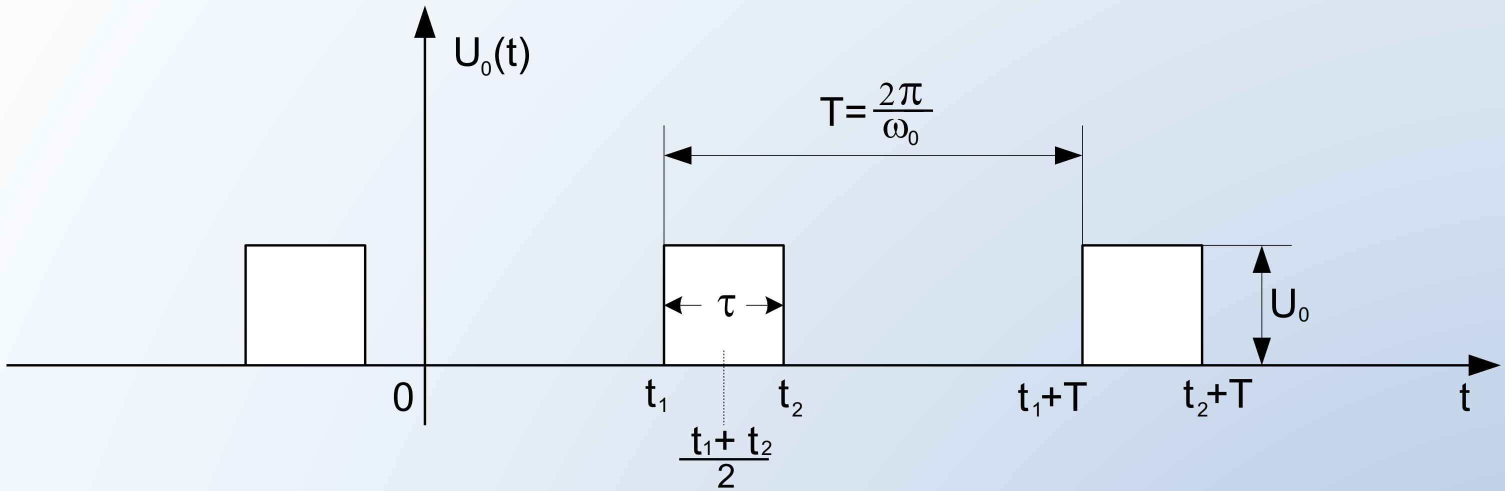
Ako se izvori testerastog i modulišućeg napona vežu na red, onda će pobudni napon sklopa biti dat njihovom sumom $u_T(t) + u_m(t)$. Na izlazu sklopa dobiće se impulsi modulisani po trajanju kod kojih se pomjera prednja ivica, a zadnja ostaje u fiksnom položaju. Vrijeme trajanja impulsa definisano je relacijom $u_T(t) + u_m(t) > U_c$.

Za promjenu položaja zadnje, odnosno i prednje i zadnje, ivice na ulaz komparatora je potrebno dovesti napone oblika kao na sledećoj slici:



SPEKTAR ITM SIGNALA

Na slici je nacrtan nemodulisani nosilac. Trajanje svakog impulsa iznosi $\tau = t_2 - t_1$, perioda ponavljanja $T = 2\pi/\omega_0$, a amlituda U_0.



Funkcija $u_0(t)$ koja predstavlja ovu povorku definisana je na sledeći način:

$$u_0(t) = \begin{cases} U_0 & \text{, za} \quad t_1 + pT \le t \le t_2 + pT;\, p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ 0 & \text{, izvan ovih intervala} \end{cases}$$

Funkcija u $_0$(t) se može predstaviti u obliku Fourierovog reda:

$$u_0(t) = U_0 \frac{t_2 - t_1}{T} + 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_2 - t_1}{T} \frac{\sin n\omega_o \frac{t_2 - t_1}{2}}{n\omega_o \frac{t_2 - t_1}{2}} \cos n\omega_0 \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)$$

odnosno:

$$u_0(t) = U_0 [\frac{t_2 - t_1}{T} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin n\omega_o \frac{t_2 - t_1}{2} \cos n\omega_0 \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)]$$

Ako iskoristimo trigonometrijsku transformaciju:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

izraz za u $_0$(t) će glasiti:

$$u_0(t) = U_0 \left\{ \frac{t_2 - t_1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\sin n\omega_0 (t - t_1) - \sin n\omega_0 (t - t_2) \right] \right\}$$

Da bi dobili izraz za impulsno modulisan signal po trajanju kome se mijenja položaj samo prednje ivice, potrebno je u prethodnom izrazu ostaviti da t_2 bude konstantno, a umjesto t_1 staviti t_1-k_Tu$_m$(t). Poslije izvršene modulacije će biti $t_2 - t_1 = t_2 - t_1 + k_T u_m(t)$, pa možemo napisati analitički izraz za ITM signal:

$$u(t) = U_0\left[\frac{\tau}{T} + \frac{k_T u_m(t)}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\sin n\omega_0\left(t - t_1 + k_T u_m(t)\right) - \sin n\omega_0\left(t - t_2\right)\right]\right]$$

Na osnovu ovog izraza možemo izvršiti analizu spektra ITM signala.

- Prvi član, $U_0 \frac{\tau}{T}$, predstavlja konstantu kojoj u spektru odgovara komponenta na učestanosti ω=0.
- Drugi član, $U_0 \frac{k_T}{T} u_m(t)$, direktno je srazmjeran modulišućem signalu.
- Treći član izraza predstavlja beskonačnu sumu fazno modulisanih signala čiji *n*-ti član ima oblik:

$$\frac{U_0}{n\pi} \sin n\omega_0 \left[t - t_1 + k_T u_m(t)\right]$$

pri čemu je M maksimalna devijacija faze *n*-tog člana :

$$\Delta\Phi_{0n} = n\omega_0 k_T \left|u_m(t)\right|_{\max} = n\omega_0 k_T U_m$$

- Četvrti član je proporcionalan nemodulisanom nosiocu.